Két faktor szerinti ANOVA

Az *A* faktor minden szintjét kombináljuk a *B* faktor minden szintjével → **keresztosztályozás**

Kiegyensúlyozott terv: ha minden „cellában” azonos számú ismétlés van.

A terv szerkezete miatt a faktorok hatását egymásétól függetlenül vizsgálhatjuk.

(Statistics >Advanced Linear/Nonlinear Models >General Linear Models >
> Factorial ANOVA)

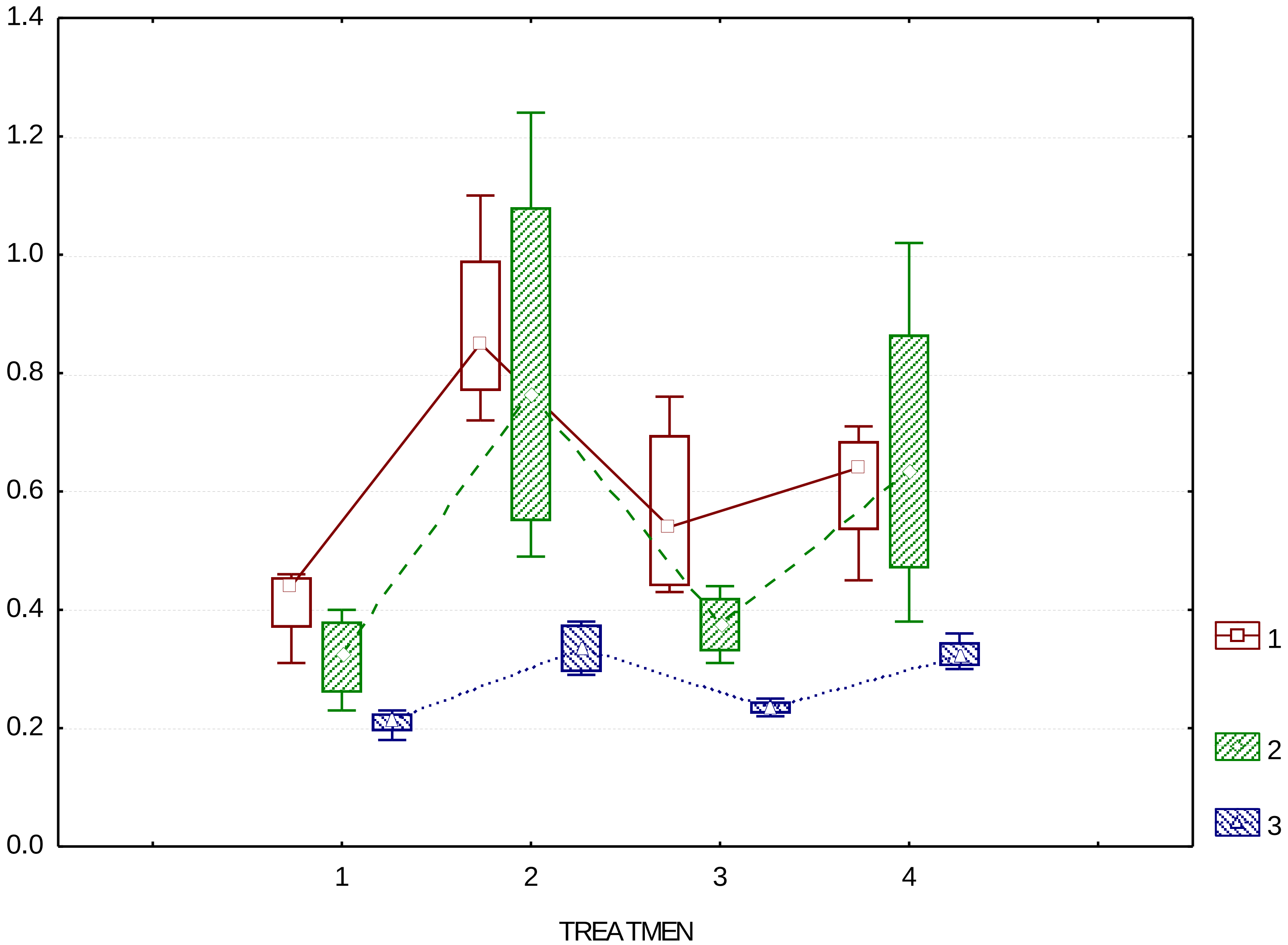
2. példa (poison.sta**)**

Túlélési idő vizsgálata különféle mérgek és különböző kezelések esetén

(Box-Hunter-Hunter: Statistics for Experimenters, J. Wiley, 1978, p. 228)

		treatment			
		A	B	C	D
poison	I	0.310	0.820	0.430	0.450
		0.450	1.100	0.450	0.710
		0.460	0.880	0.630	0.660
		0.430	0.720	0.760	0.620
	II	0.360	0.920	0.440	0.560
		0.290	0.610	0.350	1.020
		0.400	0.490	0.310	0.710
		0.230	1.240	0.400	0.380
	III	0.220	0.300	0.230	0.300
		0.210	0.370	0.250	0.360
		0.180	0.380	0.240	0.310
		0.230	0.290	0.220	0.330

Adatok ábrázolása: Box-plot



i=1,…,r j=1,…,q k=1,…,p

Modell

$N = rqp = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

1. átlag-modell

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ismétlés (k)

méreg (i) kezelés (j)

$$\mathrm{H}_0 : \mu_{11} = \mu_{12} = \cdots = \mu_{34}$$ (mind azonos)

2. hatás-modell

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

az *i*-edik méreg hatása

a *j*-edik kezelés hatása

kölcsönhatás!

$$H_0^A : \alpha_i = 0,\ i = 1,\dots,\ r$$

$$H_0^B : \quad \beta_j = 0,\ j = 1,\dots,\ q$$

$$H_0^{AB} : \quad \alpha\beta_{ij} = 0,\ i = 1,\dots,\ r;\ j = 1,\dots,\ q$$

Statisztikai számítás: ANOVA-táblázat

Az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szabadsági fok	szórásnégyzet	F
A hatása (sorok közötti)	$S_A = qp\sum_i \left(y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	r-1	$s_A^2 = \dfrac{S_A}{r-1}$	s_A^2 / s_R^2
B hatása (oszlopok közötti)	$S_B = rp\sum_j \left(y_{\cdot j\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	q-1	$s_B^2 = \dfrac{S_B}{q-1}$	s_B^2 / s_R^2
AB kölcsönhatás	$S_{AB} = p\sum_i \sum_j \left(y_{ij\cdot} - y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot j\cdot} + y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	$(r$-1$)\cdot(q$-1$)$	$s_{AB}^2 = \dfrac{S_{AB}}{(r-1)(q-1)}$	s_{AB}^2 / s_R^2
Maradék (csoportokon belüli)	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk} - y_{ij\cdot}\right)^2$	$rq(p$-1$)$	$s_R^2 = \dfrac{S_R}{rq(p-1)}$	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk} - y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	rqp-1		

(Summary fülön: All effects)

Univariate Tests of Significance for SURVIVAL (Poison)
Sigma-restricted parameterization
Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	11.03042	1	11.03042	495.9194	0.000000
POISON	1.03301	2	0.51651	23.2217	0.000000
TREATMEN	0.92121	3	0.30707	13.8056	0.000004
POISON*TREATMEN	0.25014	6	0.04169	1.8743	0.112251
Error	0.80073	36	0.02224		

A modell paraméterereinek becslése

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

méreg (i) kezelés (j)

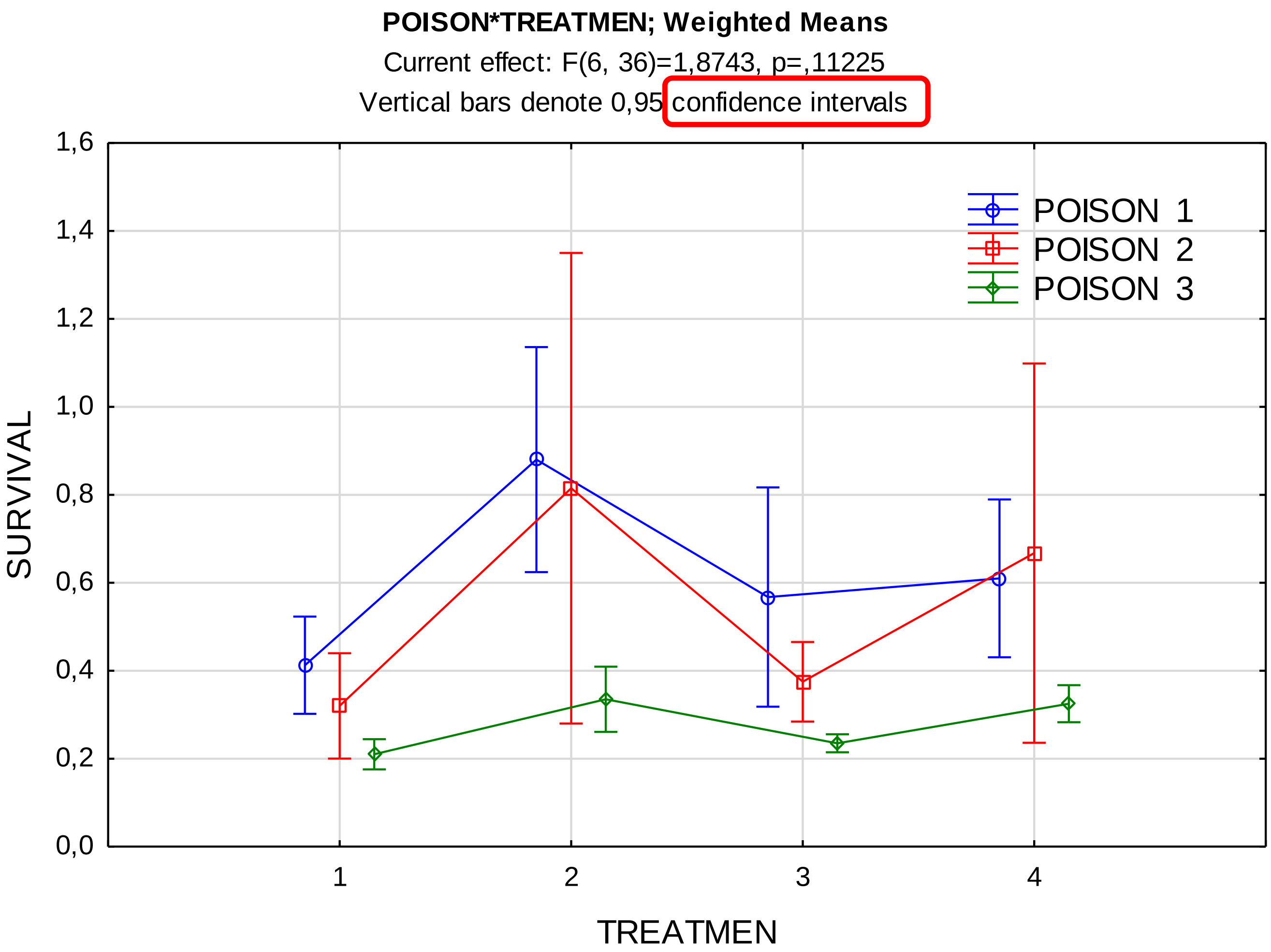
Effect	Parameter Estimates (Poison in Workbook2) Sigma-restricted parameterization SURVIVAL Param.	
Intercept	0,479375	μ
POISON	0,138125	α_1
POISON	0,065000	
TREATMEN	-0,165208	β_1
TREATMEN	0,197292	
TREATMEN	-0,086875	
POISON*TREATMEN	-0,039792	$\alpha\beta_1$
POISON*TREATMEN	0,065208	
POISON*TREATMEN	0,036875	
POISON*TREATMEN	-0,059167	
POISON*TREATMEN	0,07	
POISON*TREATMEN	-0,08	

POISON*TREATMEN; Weighted Means (Poison in Workbook2)
Current effect: F(6, 36)=1,8743, p=,11225
Effective hypothesis decomposition

	Cell No.	POISON	TREATMEN	SURVIVAL Mean	SURVIVAL Std.Err.	SURVIVAL -95,00%	SURVIVAL +95,00%	N
μ_{11}	1	1	1	0,412500	0,034731	0,301970	0,523030	4
μ_{12}	2	1	2	0,880000	0,080416	0,624082	1,135918	4
	3	1	3	0,567500	0,078355	0,318138	0,816862	4
	4	1	4	0,610000	0,056421	0,430443	0,789557	4
μ_{21}	5	2	1	0,320000	0,037639	0,200217	0,439783	4
	6	2	2	0,815000	0,168152	0,279866	1,350134	4
	7	2	3	0,375000	0,028431	0,284519	0,465481	4
	8	2	4	0,667500	0,135485	0,236326	1,098674	4
	9	3	1	0,210000	0,010801	0,175626	0,244374	4
	10	3	2	0,335000	0,023274	0,260933	0,409067	4
	11	3	3	0,235000	0,006455	0,214457	0,255543	4
	12	3	4	0,325000	0,013229	0,282900	0,367100	4

(Means fülön: Observed, weighted)

A modell paraméterereinek becslése



ANOVA feltételezéseinek ellenőrzése

1. Homoszkedaszticitás: $\sigma_e^2 = \text{konst} \ ?$

a) Statisztikai próbákkal

	Tests of Homogeneity of Variances (Poison) Effect: POISON*TREATMEN				
	Hartley F-max	Cochran C	Bartlett Chi-Sqr.	df	p
SURVIVAL	678.6000	0.423741	45.13689	11	0.000005

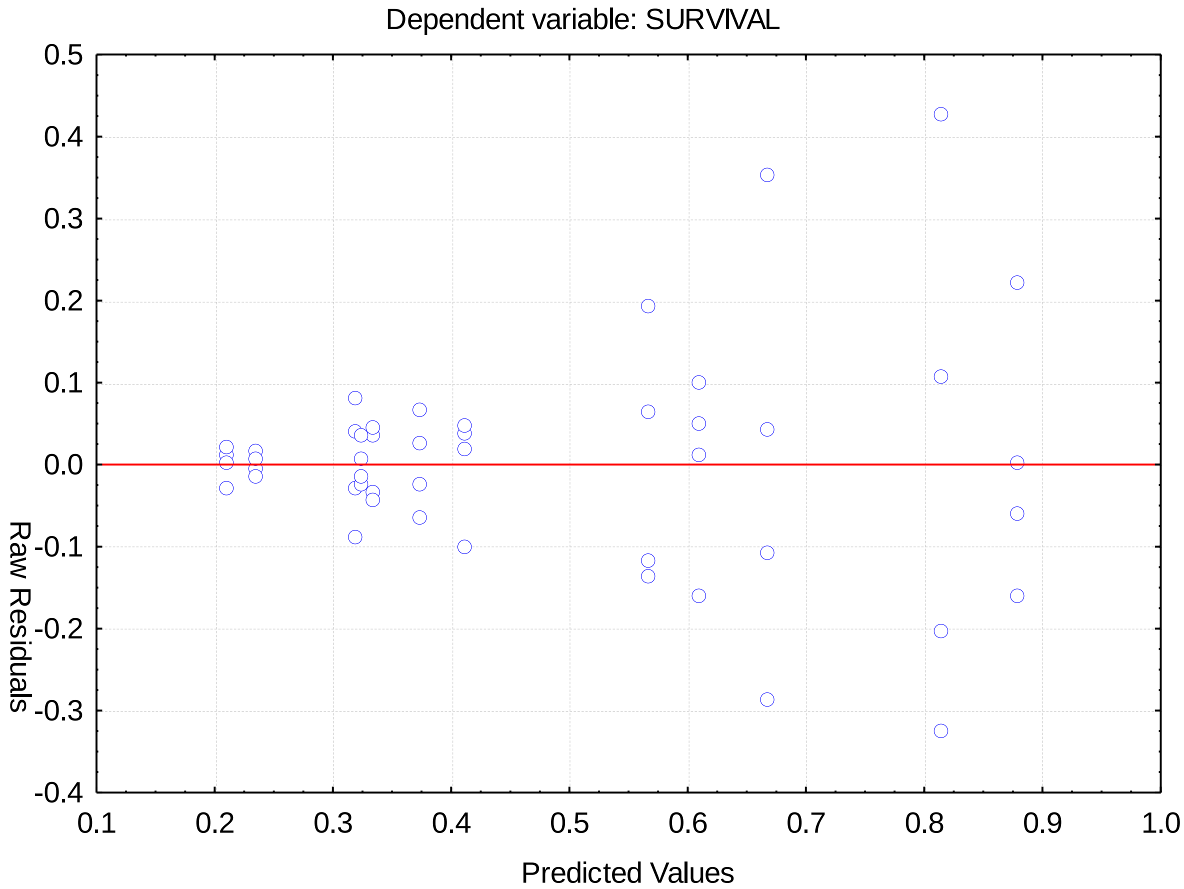
Döntés?

	Levene's Test for Homogeneity of Variances (Poison) Effect: POISON*TREATMEN Degrees of freedom for all F's: 11, 36			
	MS Effect	MS Error	F	p
SURVIVAL	0.024601	0.005069	4.853537	0.000144

(More results > Assumptions fülön: Homogeneity of variances)

1. Homoszkedaszticitás: $\sigma_e^2 = \text{konst}$?

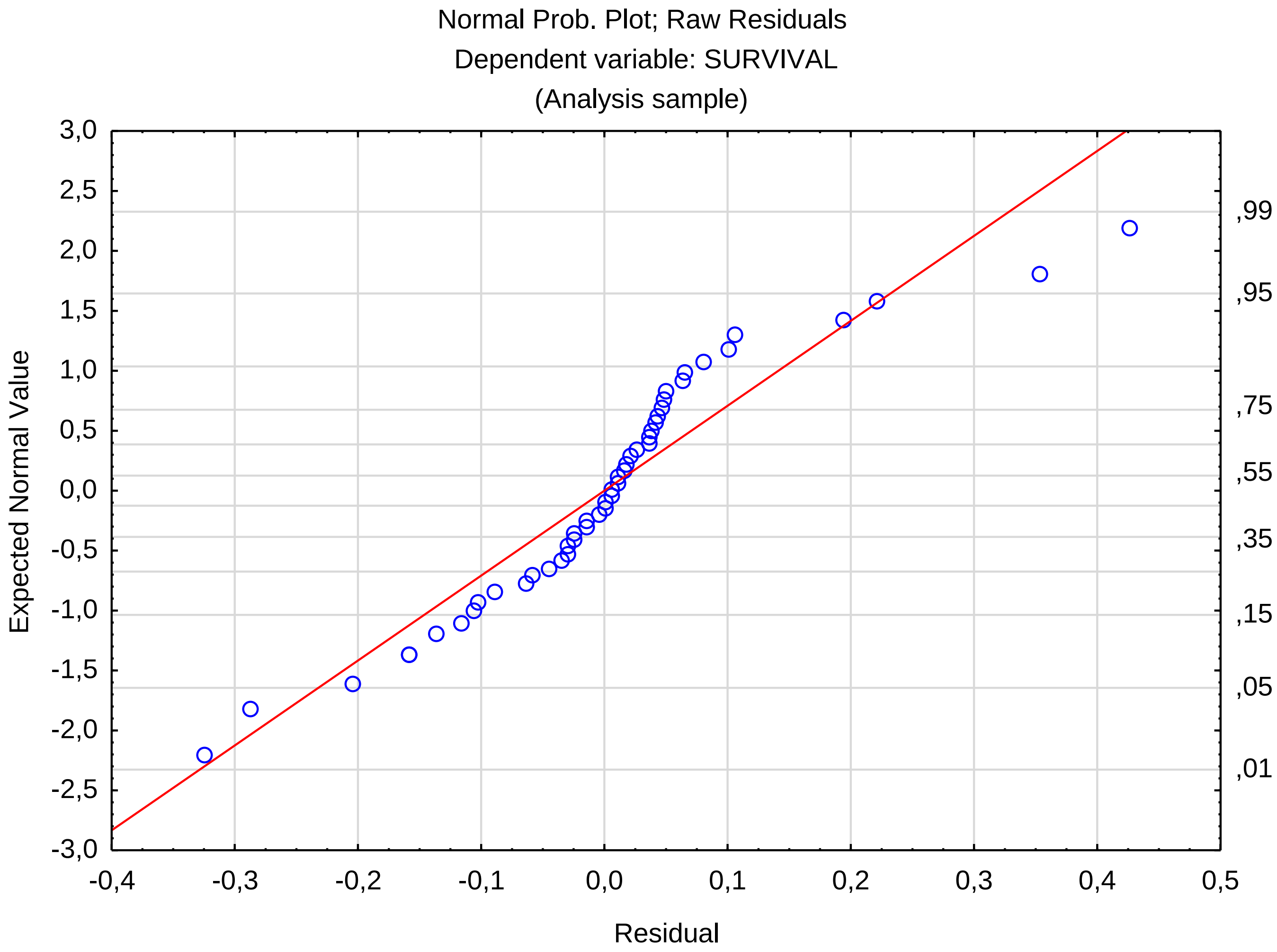
b) A reziduumok vizsgálatával



Döntés?

(Residuals1 fülön: Pred. & resid.)

2. Hibák normális eloszlásúak?



Box-Cox transzformáció

Alkalmazható, ha: $\sigma_y \sim \bar{y}^{\alpha}$ **Cél:** $Var\left(y^{tr}\right) = \text{konst}$

Levezethető a hibaterjedési törvényből:

$$Var\left(y^{tr}\right) = \left(\frac{dy^{tr}}{dy}\right)^2 \sigma_y^2 = \left(\frac{dy^{tr}}{dy}\right)^2 y^{2\alpha}$$

$$Var\left(y^{tr}\right) = \text{konst} \quad \text{ha} \quad \frac{dy^{tr}}{dy} y^{\alpha} = \text{konst}$$

Szeparálva: $dy^{tr} = k y^{-\alpha} dy$

Integrálva:

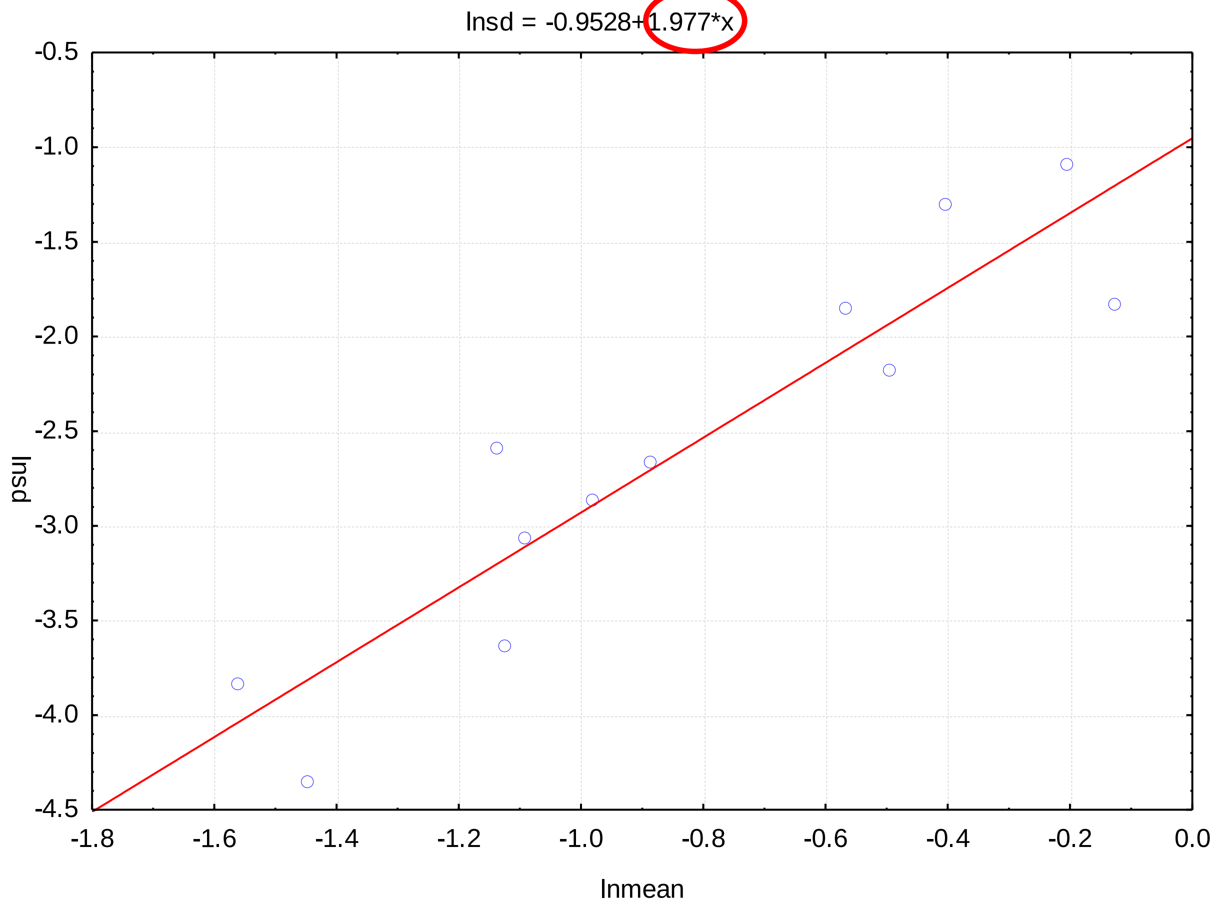
$$y^{tr} = \int y^{-\alpha} dy = \begin{cases} y^{1-\alpha} & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \ln y & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$y^{tr} = \int y^{-\alpha} dy = \begin{cases} y^{1-\alpha} & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \ln y & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

α	λ=1-α	transzformáció (y^{λ})
2	-1	$1/y$
1.5	-0.5	$1/\sqrt{y}$
1	0	$\ln y$
0.5	0.5	$\sqrt{y}$
0	1	(nincs transzformáció)

Az α kitevő megkeresése **grafikus úton**:

$\sigma_y \sim \bar{y}^{\alpha}$ $\quad$ $\ln \sigma_y = k + \alpha \ln \bar{y}$ $\quad$ egyenest kell illeszteni, és a meredekségét nézni



$\alpha \approx 2$

$\sigma_y \sim \bar{y}^2$

$\lambda \approx -1$

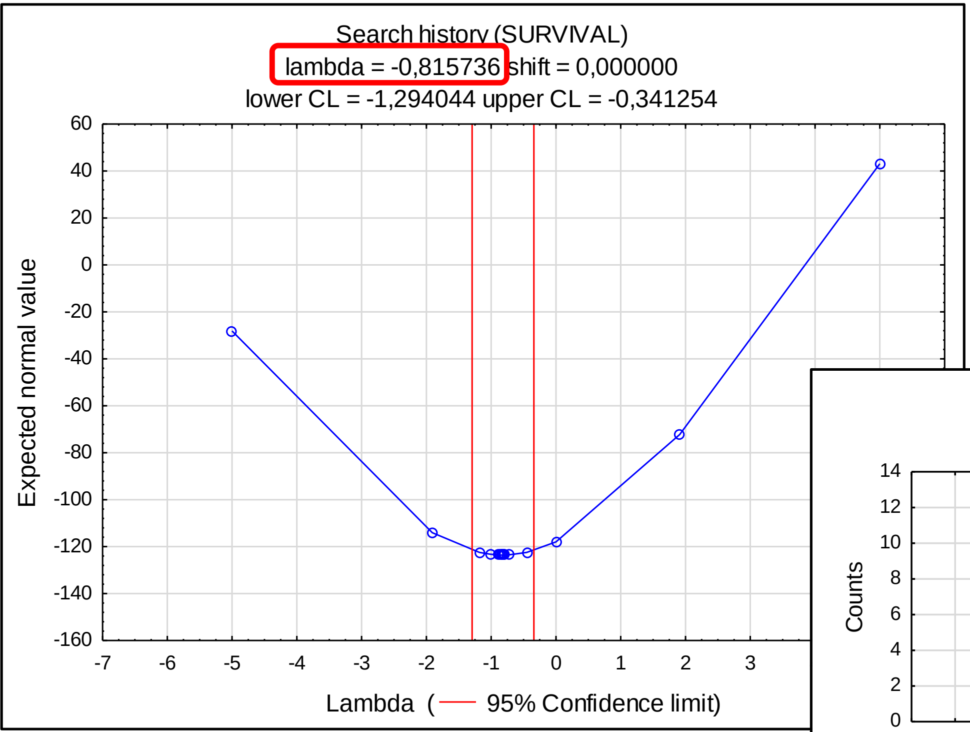
$y^{tr} = {}^{1}\!/_{y}$

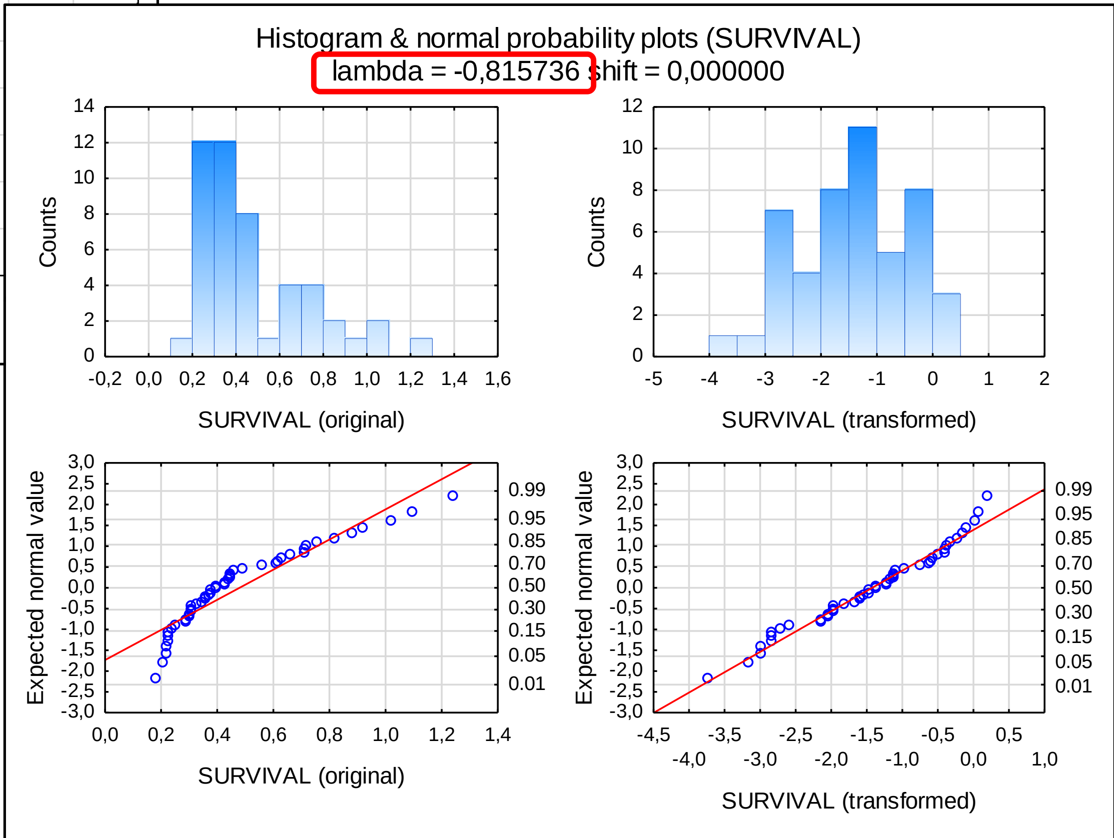
Az λ kitevő megkeresése **statisztikai szoftverrel**:

(Data > Box-Cox transformation)

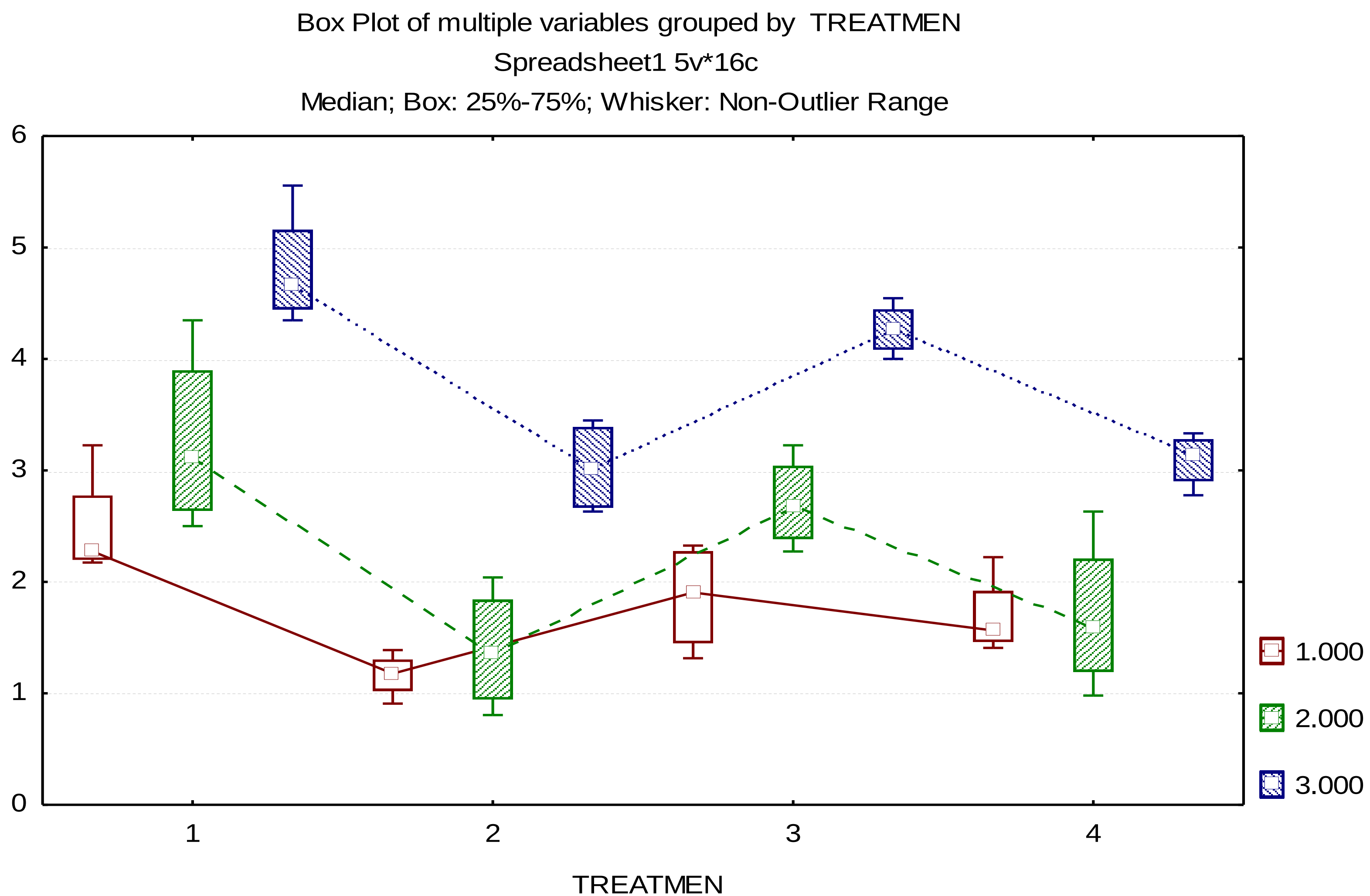
$$y^{tr} = y^{\lambda}$$

$$\lambda \approx -1$$





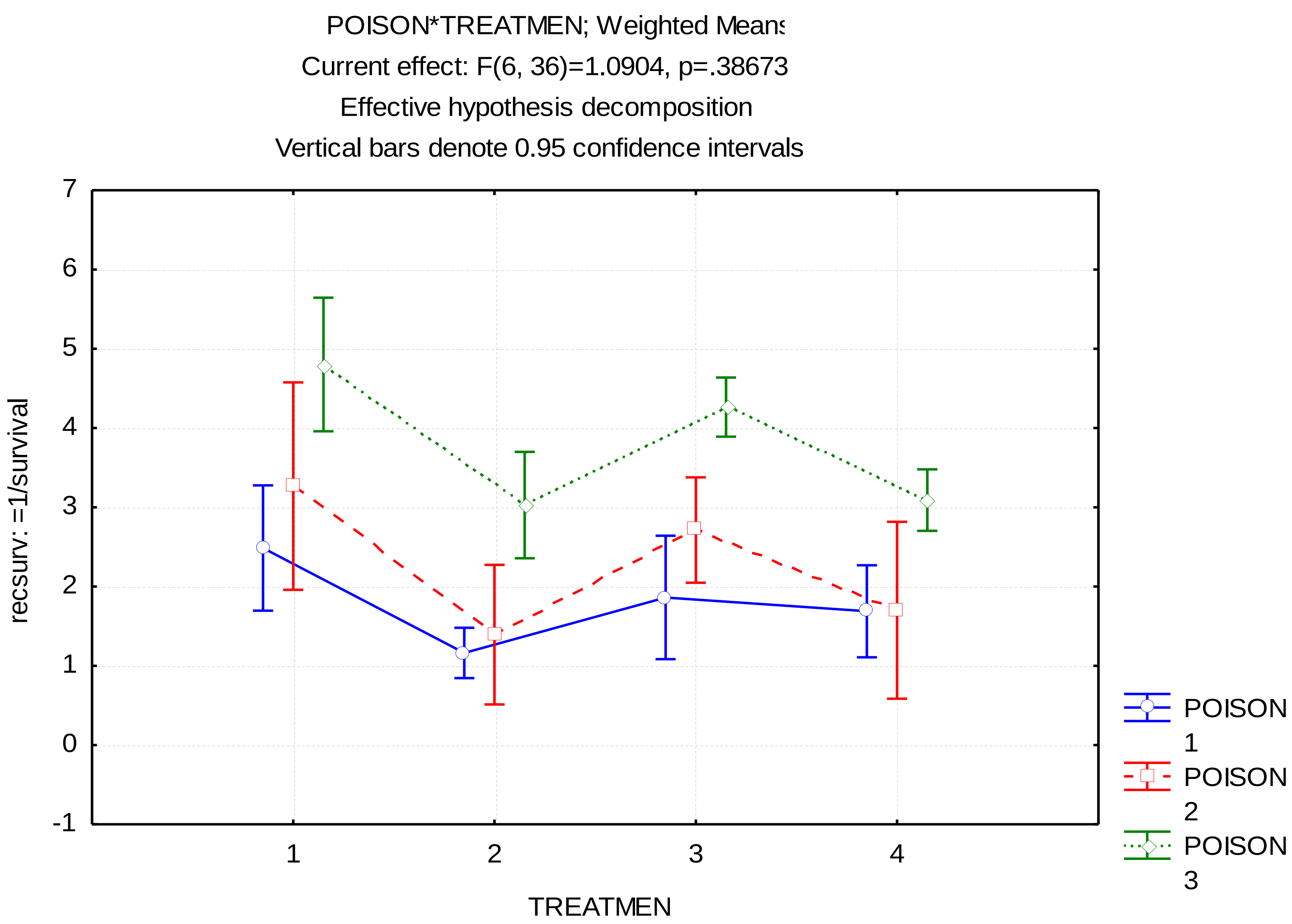
Box-plot ábra a transzformált adatokra



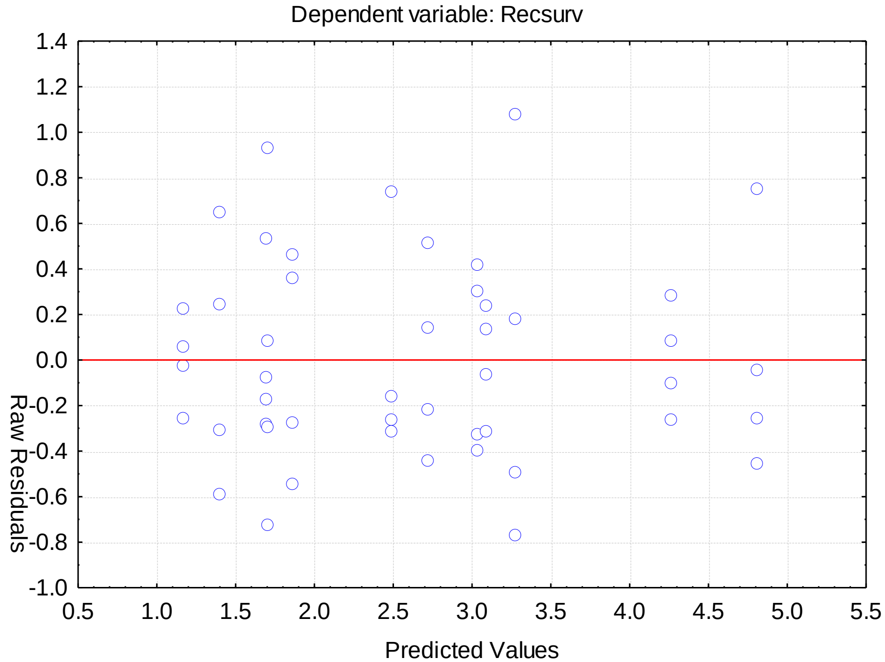
ANOVA elemzés a transzformált adatokra

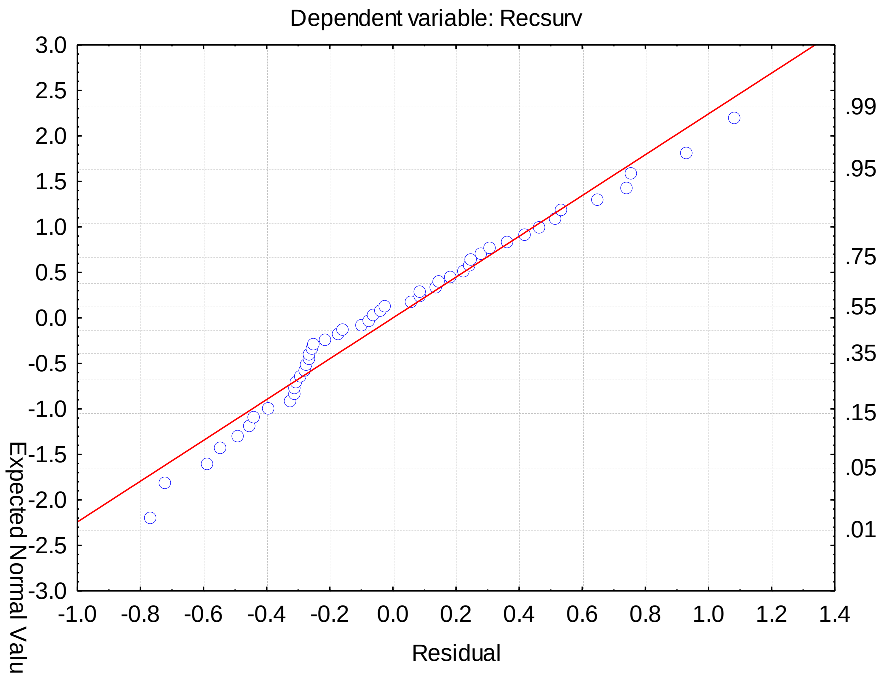
Effect	Univariate Tests of Significance for Recsurv (Poison) Sigma-restricted parameterization Effective hypothesis decomposition SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	330.0892	1	330.0892	1374.881	0.000000
POISON	34.8771	2	17.4386	72.635	0.000000
TREATMEN	20.4143	3	6.8048	28.343	0.000000
POISON*TREATMEN	1.5708	6	0.2618	1.090	0.386733
Error	8.6431	36	0.2401		

A hatások még kifejezettebbek (F értékei nagyobbak), a kölcsönhatáshoz tartozó p 0.112 helyett 0.387 lesz.


POISON*TREATMEN; Weighted Means
Current effect: F(6, 36)=1.0904, p=.38673
Effective hypothesis decomposition
Vertical bars denote 0.95 confidence intervals
recsurv: =1/survival
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
1
2
3
4
TREATMEN
POISON 1
POISON 2
POISON 3

Reziduumok vizsgálata a transzformált adatokra

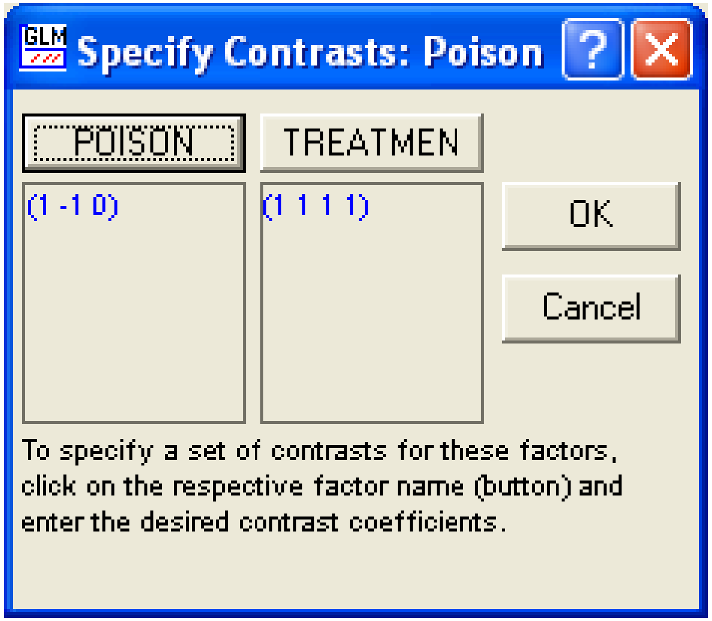


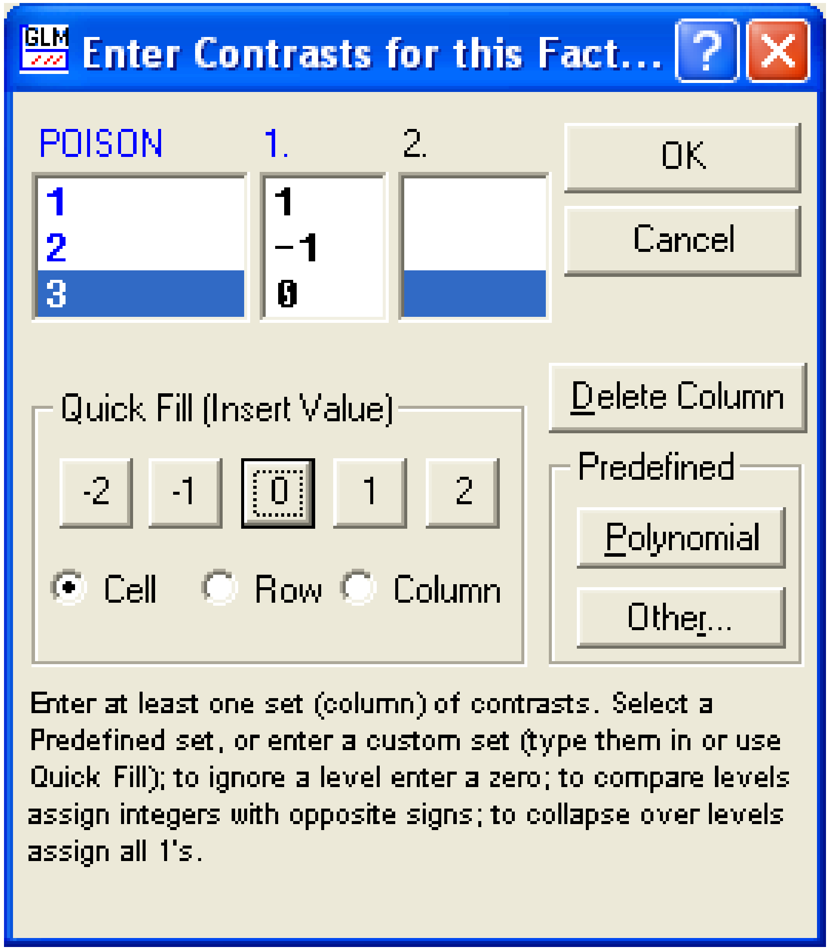


Többszörös összehasonlítások

Pl.: Különbözik-e az 1. és 2. méreg? $H_0\colon \mu_{1.} = \mu_{2.}$

Kontrasztok megadása:





(Planned comparisons fülön)

Cell No.	Between Contrast Coefficients (Poison) Coefficients for each cell in the selected effect POISON	TREATMEN	Cell N	CNTRST1
1	1	1	4	1
2	1	2	4	1
3	1	3	4	1
4	1	4	4	1
5	2	1	4	-1
6	2	2	4	-1
7	2	3	4	-1
8	2	4	4	-1
9	3	1	4	0
10	3	2	4	0
11	3	3	4	0
12	3	4	4	0

Univariate Test of Significance for Planned Comparison (Poison)
Dependent variable: recsurv

Source	Sum of Squares	Degr. of Freedom	Mean Square	F	p
Effect	1.756997	1	1.756997	7.318209	0.010362
Error	8.643083	36	0.240086		

Döntés?

Contrast Estimates (Poison)
Dependent variable: recsurv

Contrast	Estimate	Std.Err	t	p	-95.00% Cnf.Lmt	+95.00% Cnf.Lmt
CNTRST1	-1.87457	0.692944	-2.70522	0.010362	-3.27992	-0.469210

becsült hatás

$\mu_{1\cdot} - \mu_{2\cdot}$